

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

En cada ejercicio, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en las soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.

OPCIÓN A

Ejercicio 1.

- a) Resultado: 0.25 puntos. Justificación 0.25 puntos.
- b) Resultado: 0.25 puntos. Justificación 0.25 puntos.
- c) Resultado: 0.25 puntos. Justificación 0.25 puntos.
- d) Resultado: 0.5 puntos. Justificación 0.5 puntos.

Ejercicio 2.

- a) Saber en qué punto hay que evaluar: 0.25 puntos. Resultado de la evaluación: 0.25 puntos.
- b) Calcular la derivada: 0.25 puntos. Hallar los puntos críticos 0.25 puntos. Obtener y justificar el momento en que se alcanza máximo: 0.5 puntos. Decir el valor máximo: 0.25 puntos.
- c) Calcular la primitiva: 0.5 puntos. Aplicar la regla de Barrow: 0.25 puntos.

Ejercicio 3.

- a) Calcular el plano: 1 punto (repartido en procedimiento: 0.5, cálculos: 0.5). Calcular la distancia: 0.5 puntos (procedimiento: 0.25, cálculos: 0.25).
- b) Procedimiento: 0.25 puntos. Cálculos: 0.25 puntos.
- c) Procedimiento: 0.25 puntos. Cálculos: 0.25 puntos.

Ejercicio 4.

- a) Justificar que X es $B(300, 0.5)$ y se puede aproximar por una normal: 0.5 puntos. Obtener correctamente cada parámetro de la normal: 0.5 puntos.
- b) Cada probabilidad: 0.5 puntos, repartidos en 0.25 por el procedimiento y 0.25 por el resultado.

OPCIÓN B

Ejercicio 1.

- a) Por la obtención de los valores críticos ($m = 2, m = 6$): 0.5 puntos (repartidos en planteamiento: 0.25; resolución: 0.25). Por discutir el sistema en cada uno de los tres casos ($[m = 2], [m = 6], [m \neq 2, m \neq 6]$): 0.5 puntos.
- b) Procedimiento: 0.25 puntos. Cálculos: 0.25 puntos.

Ejercicio 2.

- a) Determinar correctamente cada valor: 0.25 puntos.
- b) Plantear correctamente la suma de las dos integrales: 0.5 puntos. Obtener cada primitiva: 0.25 puntos. Aplicar correctamente la regla de Barrow en cada integral: 0.25 puntos.

Ejercicio 3.

- a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
- b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
- c) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

Ejercicio 4.

- a) Identificar la probabilidad a calcular: 0.5 puntos. Procedimiento: 0.5 puntos. Resultado: 0.25 puntos.
- b) Identificar la probabilidad a calcular: 0.5 puntos. Procedimiento: 0.5 puntos. Resultado: 0.25 puntos.

MATEMÁTICAS II—SOLUCIONES
OPCIÓN A

Ejercicio 1

a) Basta elegir A de modo que una fila sea combinación lineal de las restantes. Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

b) Se puede partir de una matriz con determinante $d \neq 0$ y multiplicar una fila por $1/d$, de este modo el determinante queda multiplicado por ese número y la nueva matriz tendría determinante igual a 1. Ejemplo: Como $\det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$, podemos tomar $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

c) Para que A coincida con su traspuesta, debe ser simétrica. Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

d) Para A podemos tomar cualquier matriz de dimensión 3×3 , formada por números distintos de cero y con sus filas y columnas distintas y como matriz C se podría elegir la propia matriz A o también una matriz diagonal con los tres elementos de la diagonal iguales.

Por ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ verifican que $A \cdot C = C \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 2

a) Las 12 horas del día 10 de abril, corresponden a $t = 9.5$ y el nivel de NO_2 será $c(9.5) = 98.21 \text{ mg/m}^3$.

b) Se trata de hallar el máximo absoluto de $c(t)$ en el intervalo $[0, 30]$. La derivada es $c'(t) = -6 + \frac{23t}{10} - \frac{t^2}{10}$, que se anula en $t = 3$ y $t = 20$. Como $c(0) = 80$, $c(3) = 71.45$, $c(20) \approx 153.33$ y $c(30) = 35$, el máximo absoluto se alcanza en $t = 20$, es decir las 24 horas del 20 de abril, y su valor es 153.33 mg/m^3 .

c) El nivel promedio es $\frac{1}{30} \int_0^{30} c(t) dt = \frac{1}{30} \left[80t - 3t^2 + \frac{23}{60}t^3 - \frac{1}{120}t^4 \right]_0^{30} = \boxed{110 \text{ mg/m}^3}$.

Ejercicio 3

a) Dado que $\vec{AB} = (0, 3, 3)$ y $\vec{AC} = (4, 4, 2)$, el plano π tiene por ecuación:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{x - 2y + 2z + 9 = 0}.$$

La distancia del punto al plano es $\text{distancia}(D, \pi) = \frac{21}{\sqrt{1+4+4}} = 7$.

b) El volumen de tetraedro es $V = \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \boxed{21}$.

c) El área del triángulo es $S = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \frac{1}{2} \|(0, 3, 3) \times (4, 4, 2)\| = \frac{1}{2} \|(-6, 12, -12)\| = \boxed{9}$.

Nótese que el volumen del tetraedro coincide con $1/3$ del área de la base (que es el triángulo ABC) por la altura (que es justamente $\text{distancia}(D, \pi)$).

Ejercicio 4

a) La variable aleatoria X : "número de respuestas acertadas, tiene una distribución $B(300, 0.5)$ y puede aproximarse mediante una v. a. normal Y de media $\mu = 300/2 = 150$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{300 \cdot 0.25} = \sqrt{75} \approx 8.66$, $Y = N(150, 8.66)$.

b) La probabilidad de que el opositor acierte a lo sumo 130 preguntas, usando la corrección de continuidad, puede aproximarse por $P(Y < 130.5)$. Si $Z = \frac{Y - 150}{8.66}$, se tiene:

$$P(Y < 130.5) = P(Z < -2.25) = 1 - P(Z < 2.25) \approx 1 - 0.9878 = 0.0122.$$

La probabilidad de que acierte 160 respuestas se aproxima por:

$$P(X = 160) \approx P(159.5 \leq Y \leq 160.5) = P(1.1 \leq Z \leq 1.21) = P(Z \leq 1.21) - P(Z < 1.1) \approx 0.0226.$$

SOLUCIONES
OPCIÓN B

Ejercicio 1

a) Sea A la matriz de coeficientes del sistema y $[A|b]$ la matriz ampliada. Entonces

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -m & -1 & 0 \\ m & -4 & 6-2m & -8m \\ -1 & 2 & 1 & 6 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -m & -1 & 0 \\ 0 & 2-m & 0 & 6 \\ 0 & 0 & m-6 & 2(m-6) \end{array} \right].$$

- Si $m \neq 2, m \neq 6$: $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A|b) = 3 = n^\circ$ incógnitas \Rightarrow Sistema compatible determinado.
- Si $m = 6$: $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A|b) = 2 < n^\circ$ incógnitas \Rightarrow Sistema compatible indeterminado.
- Si $m = 2$: $\text{Rango}(A) = 2 \neq \text{Rango}(A|b) = 3 \Rightarrow$ Sistema incompatible.

b) Si $m = 6$, es $[A|b] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$ y despejando se obtiene $\begin{cases} x = \lambda - 9, \\ y = -3/2, \\ z = \lambda, \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}.$

Ejercicio 2

a) $f'(-1) = 0$ (la tangente es horizontal). Por otra parte $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

b) La integral pedida es:

$$\int_{-3}^0 (x^2 + 2x + 1) dx + \int_0^\pi (1 + \sin x) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right) \Big|_{-3}^0 + (x - \cos x) \Big|_0^\pi = -(-9 + 9 - 3) + \pi + 2 = \boxed{5 + \pi}.$$

Ejercicio 3

a) Unas ecuaciones paramétricas de la recta s son $\begin{cases} x = 2 + \mu, \\ y = \mu, \\ z = 1 - \mu, \end{cases}$ lo que prueba que $\vec{v} = (1, 1, -1)$ es vector director de ambas rectas. Además, el punto $P(2, 3, 1)$ está en r , pero no en s . Por lo tanto las rectas son paralelas.

b) El plano π que contiene a ambas rectas está determinado por el punto P , el vector $\vec{v} = (1, 1, -1)$ y el vector \vec{PQ} , con $Q(2, 0, 1)$. Por tanto $\pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{x + z = 3}$.

c) Dado un punto genérico $B(2 + \lambda, 3 + \lambda, 1 - \lambda)$ de la recta r , el vector $\vec{AB} = (\lambda - 1, 2 + \lambda, 1 - \lambda)$ debe verificar que $\vec{AB} \cdot \vec{v} = 0$. Lo que equivale a $\lambda = 0$ y $\boxed{B(2, 3, 1)}$.

Ejercicio 4

Se consideran los sucesos $M =$ "Ser mujer", $A =$ "Estudiar alemán".

Los datos son: $P(M) = 0.6$, $P(A) = 0.3$, $P(A|M) = 0.25$.

a) $P(M|A) = \frac{P(M)P(A|M)}{P(A)} = \boxed{0.5}$.

b) $P(A \cap \bar{M}) = P(A) - P(A \cap M) = P(A) - P(M)P(A|M) = \boxed{0.15}$.

DOCUMENTO DE ORIENTACIONES PARA LA EvAU

Matemáticas II. Curso 2018/2019

ESTRUCTURA DEL EXAMEN

El examen constará de **cuatro problemas igualmente ponderados**, cada uno de ellos relativo a uno de los cuatro bloques con contenido específico del currículo oficial de MATEMÁTICAS II, 2º Bachillerato: **ÁLGEBRA, ANÁLISIS, GEOMETRÍA y PROBABILIDAD.**

CONTENIDOS

Las pruebas se elaborarán de acuerdo con las matrices de contenidos recogidos en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre. Además según las especificaciones de estándares de aprendizaje evaluables de la Orden ECD/42/2018, de 25 de enero (BOE de 26 de enero 2018) y con el Decreto 52/2015, de 21 de mayo de la Comunidad de Madrid, se podrá pedir en las mismas la realización de tareas similares a las siguientes:

ÁLGEBRA

- Usar matrices como herramienta para representar datos estructurados y sistemas de ecuaciones lineales.
- Realizar operaciones con matrices y aplicar propiedades.
- Calcular determinantes de orden menor o igual que 4 y manejar las propiedades elementales.
- Calcular la inversa de una matriz cuadrada de orden no superior a tres. Usar adecuadamente las propiedades de la matriz inversa.
- Calcular el rango de una matriz de orden no superior a 4, por determinantes o por el método de Gauss. Estudiar el rango de una matriz que dependa como máximo de un parámetro.
- Resolver sistemas de ecuaciones lineales. Discutir las soluciones de un sistema lineal, dependiente de un parámetro.
- Plantear y resolver problemas que simulen situaciones de la vida real, cuya solución pueda obtenerse a partir de un sistema lineal de, como máximo, tres ecuaciones con tres incógnitas.

ANÁLISIS

- Calcular el límite de una función en un punto y en el infinito. Calcular límites laterales y resolver indeterminaciones sencillas.
- Interpretar el significado de la continuidad y la discontinuidad. Identificar funciones continuas y tipos de discontinuidad. Manejar operaciones algebraicas con funciones continuas y composición de funciones continuas.
- Usar el teorema de Bolzano para localizar soluciones de una ecuación.
- Manejar y saber interpretar el concepto de derivada de una función en un punto. Manejar las propiedades de la derivación y calcular derivadas.

- Usar derivadas para estudiar intervalos de crecimiento y decrecimiento y valores extremos. Plantear y resolver de problemas de optimización.
- Conocer y aplicar los resultados del Teorema de Rolle, el Teorema del Valor Medio y la regla de L'Hôpital.
- Calcular primitivas inmediatas y de funciones que sean derivadas de una función compuesta. Integrar por partes y mediante cambio de variables (ejemplos simples). Integrar funciones racionales (con denominador de grado no mayor que dos).
- Calcular áreas de recintos limitados por rectas o curvas sencillas.

GEOMETRÍA

- Operar con vectores del espacio tridimensional. Estudiar la dependencia e independencia lineal. Manejar los conceptos de base y coordenadas.
- Manejar el producto escalar: definición, propiedades e interpretación geométrica; vectores unitarios, ortogonales y ortonormales.
- Calcular el ángulo entre dos vectores.
- Manejar el producto vectorial: definición, propiedades e interpretación geométrica.
- Manejar el producto mixto de tres vectores: definición, propiedades e interpretación geométrica.
- Aplicar los distintos productos al cálculo de áreas y volúmenes.
- Obtener ecuaciones de rectas en el espacio, en cualquiera de sus formas. Obtener ecuaciones de planos. Estudiar la posición relativa de puntos, rectas y planos en el espacio.
- Resolver problemas de geometría afín con rectas y planos.
- Calcular distancias entre puntos rectas y planos, así como ángulos entre dos planos, entre dos rectas que se corten y entre una recta y un plano.

PROBABILIDAD

- Calcular la probabilidad de sucesos aleatorios, mediante la regla de Laplace o las fórmulas de la axiomática de Kolmogorov.
- Calcular probabilidades condicionadas. Usar el teorema de probabilidad total y la fórmula de Bayes.
- Identificar variables aleatorias discretas. Calcular probabilidades de sucesos asociados a una distribución binomial. Calcular la media y la desviación típica de una variable aleatoria con distribución binomial.
- Calcular probabilidades de sucesos que se puedan modelizar mediante una distribución binomial, a partir de su aproximación por la normal.
- Calcular probabilidades de sucesos que pueden modelizarse mediante una distribución normal.